Aufgaben zu Ebenen

Ebenengleichung in Parameterform und Punktprobe

Aufgabe 1:
Gesucht ist eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte A(1; -2; 2); B(2; 1; -1) und C(4; 1; 2) in Parameterform.

Lösung:

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} \text{ mit } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-(-2) \\ -1-2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-(-2) \\ 2-2 \end{pmatrix}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:
Liegt der Punkt P(6; 7; -4) in der Ebene E aus Aufgabe 1?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten:

(1) $6 = 1 + s + 3t \quad | -1$
(2) $7 = -2 + 3s + 3t \quad | +2$
(3) $-4 = 2 - 3s \quad | -2$

(1) $5 = s + 3t$
(2) $9 = 3s + 3t$
(3) $-6 = -3s$

Wir wählen 2 der 3 Gleichungen aus, lösen diese nach s und t auf und machen dann die Probe mit der nicht verwendeten Gleichung. Wären die ausgewählten Gleichungen Vielfache, dann muss eine andere Gleichung ausgewählt werden. Ist gleich zu Beginn ein Widerspruch zu sehen (z.B. -4 = 2), dann liegt der Punkt nicht in der Ebene. Hier bietet es sich an, z.B. die Gleichungen (2) und (3) zu wählen. Allgemein müssten wir hier erst das Subtraktions-/Additionsverfahren anwenden, um s oder t zu eliminieren. Gleichung (3) liefert aber direkt s = 2. Setzen wir dies in (2) ein, ergibt sich $9 = 3\cdot 2 + 3t$, somit ist $3 = 3t$ und $t = 1$. Wir machen die Probe mit der nicht verwendeten Gleichung (1):

$5 = 2 + 3\cdot 1$ Ist erfüllt! Damit liegt der Punkt P in der Ebene E.

Aufgabe 3: (weitere Punktprobe)
Es soll geprüft werden, ob der Punkt P(3; 10, -2) in der Ebene mit der Gleichung

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

liegt.

Lösung:
Wenn dieser Punkt in der Ebene E liegt, so gibt es ein s und ein t, so dass

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

gilt, bzw.:

$$\begin{aligned} 3 &= 1 - 2s + 2t &\Leftrightarrow&\quad (1)\ \ 2 = -2s + 2t \\ 10 &= 2 + 4s + 2t &\Leftrightarrow&\quad (2)\ \ 8 = 4s + 2t \\ -2 &= 1 + s - 2t &\Leftrightarrow&\quad (3)\ -3 = s - 2t \end{aligned}$$

Wir wählen wieder zwei Gleichungen aus, lösen diese nach s und t auf und manchen dann die Probe mit der nicht ausgewählten Gleichung. Hier bietet sich die Wahl von (2) und (3) an, denn wenn wir diese addieren, erhalten wir 5 = 5s, womit s = 1 ist. Einsetzen von s = 1 in (3) ergibt -3 = 1 – 2t, womit wir t = 2 erhalten. Die Probe mit der ersten Gleichung ergibt 2 = – 2 + 4, womit diese erfüllt ist und P in E liegt.

Ist die Ebene in Koordinatenform gegeben, so muss man nur den Punkt in die Ebenengleichung einsetzen und prüfen, ob diese erfüllt ist, was deutlich einfacher ist.

Schnittpunkt Ebene/Gerade

Aufgabe 4
Es soll die Lage der Geraden g zur Ebene E bestimmt werden und gegebenenfalls der Schnittpunkt:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und}\quad E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Gleichsetzen ergibt drei Gleichungen mit drei Unbekannten, wobei wir diese so umformen können, dass nur die Unbekannten jeweils auf der rechten Seite der Gleichungen stehen:

$$\begin{aligned} 1 + 2r &= 2 - s + 2t &\Leftrightarrow&\quad (1)\ \ -1 = -2r - s + 2t \\ -r &= -2 + s + t &\Leftrightarrow&\quad (2)\ \ \ \ 2 = r + s + t \\ -6 + 4r &= 1 + s + 2t &\Leftrightarrow&\quad (3)\ \ -7 = -4r + s + 2t \end{aligned}$$

Wir eliminieren s, indem wir die Gleichung (1) zur Gleichung (2) und (3) addieren. So machen wir aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten:

(1) + (2)	1 = -r + 3t	(I)
(1) + (3)	-8 = -6r + 4t	(II)

Der Einfachheit halber wurden neue Ziffern vergeben und wir addieren das -6-fache von (I) zu (II), um r zu eliminieren: -6(I) + (II) -14 = -14t

Damit erhalten wir t = 1, was wir z.B. in (I) einsetzen können, womit sich 1 = -r + 3 ergibt und somit r = 2. Setzen wir t = 1 und r = 2 z.B. in (2) ein, ergibt sich s = -1.

Hätte sich ein Widerspruch ergeben, z.B. 4 = 5, dann wäre die Gerade g parallel zur Ebene E gewesen. Hätte sich eine Gleichung ergeben, die immer richtig ist, wie z.B. 4 = 4, dann hätte g in E gelegen. Diese Spezialfälle treten immer auf, wenn bei einer Addition oder Subtraktion zweier Gleichungen alle Variablen verschwinden.

Wir können nun noch den Schnittpunkt bestimmen, indem wir r = 2 in g oder s = -1 und t = 1 in E einsetzen. Wir setzten r = 2 in g ein, was einfacher ist:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Somit ist S(5; -2, 2) der Schnittpunkt.

Bestimmung der Koordinaten- oder Normalform über die Parameterform

In der Koordinatenform wird vieles einfacher, wie beispielsweise die Punktprobe oder die Berechnung des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene und zudem lassen sich erst hier Abstände einer Ebene zu Punkten oder Geraden und auch Schnittwinkel „direkt" berechnen. Es ist ebenfalls über die Koordinatenform einfach zu erkennen, ob zwei Ebenen parallel oder identisch sind.

Aufgabe 5:
Gesucht wird eine Koordinatengleichung der folgenden Ebene in Parameterform:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

<u>1. Möglichkeit:</u>
Es wird zunächst gezeigt, wie dieses Verfahren allgemein angewendet werden kann.

$$E: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$$

Wir bestimmen den Normalenvektor $\vec{n}$ über das Kreuzprodukt bzw. Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt, dass $\vec{n}$ orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren ist bzw. dass dann die Skalaprodukte $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{w} = 0$ ergeben.

Danach ergibt sich mit E: $[\vec{x} - \vec{a}] \cdot \vec{n} = 0$ die Ebenengleichung in Normalform bzw. durch das Ausmultiplizieren der Gleichungen in Normalform die Gleichung $\vec{x} \cdot \vec{n} - \vec{a} \cdot \vec{n} = 0$ bzw. $\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$. Wir erhalten somit direkt die Koordinatengleichung durch:

$$E\colon n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = c \quad \text{mit} \quad c = \vec{a} \cdot \vec{n}$$

Im Beispiel:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4 \\ 2-2 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir könnten auch Vielfache dieses Normalenvektors verwenden (außer natürlich, wie immer, das Nullfache).

Damit ist E: $2x - z = c$ bis auf c bekannt. Setzen wir den Stützvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein, was $\vec{a} \cdot \vec{n}$ entspricht, ergibt sich c: $2 \cdot (-1) - 2 = c$, womit $c = -4$ ist und E: $2x - z = -4$.

Dies ist eine mögliche Lösung, denn E: $-2x + z = 4$ oder E: $4x - 2z = -8$ (d.h. das (-1)-fache oder das 2-fache) sind auch Lösungen bzw. mögliche Koordinatengleichungen von E.

2. Möglichkeit:

Der Normalenvektor $\vec{n}$ ist zu den beiden Richtungsvektoren orthogonal. Damit gilt

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \text{ und } \vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \ .$$

Hieraus ergeben sich 2 Gleichungen für 3 Unbekannte:

$$n_1 - n_2 + 2n_3 = 0$$

$$n_1 - 2n_2 + 2n_3 = 0$$

Damit ist $\vec{n}$ bis auf die Länge festgelegt. Wir eliminieren nun eine Unbekannte, z.B. n_1 durch Subtraktion der beiden Gleichungen. Wir erhalten $n_2 = 0$. Hier sind jetzt gleich 2 Variablen entfallen. Nun können wir eine der anderen beiden Variablen auf einen Wert setzen (nicht auf Null!), z.B. $n_3 = 1$. Falls nicht, wie in diesem Beispiel, gleich zwei Variablen entfallen, dann setzt man in der sich ergebenden Gleichung mit zwei Variablen eine auf einen Wert. Setzen wir nun die Werte für n_2 und n_3 in beispielsweise die oberste Gleichung ein, so ergibt sich $n_1 - 0 + 2 = 0$, womit $n_1 = -2$ ist. Wir haben nun einen Normalenvektor gefunden (einen, da er auch eine andere Länge haben könnte und somit auch Vielfache dieses Vektors Normalenvektoren sind):

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun könnten wir – wie bei Möglichkeit 1 – vorgehen oder den Weg über die Normalform gehen. Wir verwenden den Stützvektor $\vec{a}$ der Parameterform erhalten die Normalengleichung:

$$\text{E: } \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ausmultiplizieren führt zur Koordinatenform:

$$\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2x + z = 4$$

<u>3. Möglichkeit:</u> Mit der Ebenengleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} &(1) \quad x = -1 + s + t \\ &(2) \quad y = 1 - s - 2t \\ &(3) \quad z = 2 + 2s + 2t \end{aligned}$$

Man kann zwei der obigen Gleichungen (wir wählen (1) und (2)) nach s und t auflösen:

$$(1) + (2) \qquad x + y = -t$$

Somit ist $t = -x - y$. In (1) einsetzen ergibt $x = -1 + s - x - y$ und somit $s = 2x + y + 1$.

Nun setzen wir dies in (3) ein:

$$z = 2 + 2(2x + y + 1) + 2(-x - y)$$

Damit ergibt sich E: $-2x + z = 4$.

Bemerkung:
Die Ebene E ist parallel zur y-Achse, da die y-Komponente nicht durch die Ebengleichung festgelegt ist, oder einfach gesagt, y in der Gleichung fehlt. F: $z = 4$ wäre parallel zur x- und zur y-Achse, d.h. parallel zur x-y-Ebene und schneidet bei $z = 4$ die z-Achse. Bei F erhalten wir beliebige Punkte (x; y; 4), wobei x und y frei wählbar sind.

Punktprobe Ebenen mit der Koordinatenform

Aufgabe 6:
Liegt P(1; 4; -2) in der Ebene E: $2x + 3y + z = 4$ und falls nicht, wie lautet eine Koordinatengleichung einer Ebene F, die parallel zu E ist und P enthält?

Wir setzen P in E ein: $2\cdot 1 + 3\cdot 4 + (-2) = 12 \neq 4$, also liegt P nicht in E.

F: $2x + 3y + z = 12$ wäre dann die zu E parallele Ebene, die P enthält.

Ebenengleichung in Koordinatenform / Normalform

Aufgabe 7:
Es soll die Normalengleichung von E in die Koordinatenform gebracht werden:

$$\text{E: } \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Lösung:
Multipliziert man die obige Normalengleichung aus, so erhält man eine Koordinatengleichung der Ebene:

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

Hier haben wir x_1, x_2 und x_3 für die Komponenten des Vektors $\vec{x}$ verwendet, wir können aber auch x, y und z verwenden. Es ergibt sich

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 - (-1 + 2 - 3) = 0\ ,$$

womit wir eine Gleichung von E in Koordinatenform erhalten:

$$\text{E: } -x_1 + x_2 + 3x_3 = -2$$

Bzw.:

$$\text{E: } -x + y + 3z = -2$$

Aufgabe 8:
Wie ist die Lage der Ebenen E_1: $x - y + 2z = 8$, E_2: $2x - 2y + 4z = 16$, E_3: $2x - 2y + 4z = 10$ und E_4: $5x - 2y + 5z = 1$ zueinander?

Lösung:
Die beiden Ebenen

$$E_1: x - y + 2z = 8 \text{ und } E_2: 2x - 2y + 4z = 16$$

sind identisch (sie sind Vielfache und damit äquivalent), während

$$E_3\colon 2x - 2y + 4z = 10$$

parallel zu beiden Ebenen E_1 und E_2 ist. Die Ebene

$$E_4\colon 5x - 2y + 5z = 1$$

wäre weder parallel zu den Ebenen E_1 bis E_3 noch identisch mit einer von diesen, denn der Normalenvektor

$$\vec{n}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

dieser Ebene ist kein Vielfaches der Normalenvektoren der anderen Ebenen (was wir direkt am Vergleich der linken Seiten der Normalengleichungen oben sehen können).

Aufgabe 9:
E: $2x - y + z = 4$, gegeben als Koordinatenform, soll in die Normalform umgeformt werden:

Lösung:
Der Normalenvektor kann einfach abgelesen werden:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Einen Punkt in der Ebene E finden wir schnell, denn dieser muss die Koordinatengleichung erfüllen und wir können einfach zwei Komponenten festlegen. Setzt man z.B. $y = 0$ und $z = 0$, so ergibt sich $2x = 4$ und $x = 2$. Somit wäre $P(2; 0; 0)$ ein Punkt der Ebene und wir haben eine Normalform von E:

$$E\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Koordinatenform in Parameterform

Aufgabe 10:
Gesucht wird eine Parameterform der folgenden Ebene:

$$E\colon 2x - 4y + 2z = 8$$

Lösung :
Wir lösen die Gleichung nach einer Variablen auf, z.B. nach x:

$$
\begin{aligned}
2x &= 8 + 4y - 2z \qquad &&| :2 \\
x &= 4 + 2y - z
\end{aligned}
$$

Nun setzen wir die anderen beiden Variablen auf Parameter, z.B. y = r und z = s:

$$
\begin{aligned}
x &= 4 + 2r - s \\
y &= \phantom{4 + {}} r \\
z &= \phantom{4 + 2r - {}} s
\end{aligned}
$$

Damit haben wir bereits eine Parameterform, wir müssen die oberen drei Gleichungen nur in Vektor-Form schreiben:

$$
E: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Alternativ hätten auch drei Punkte in E bestimmt werden können, z.B. A(4; 0; 0), B(0; -2; 0) und C(0; 0; 4) (erfüllen alle die Gleichung E: 2x – 4y + 2z = 8).
Je nachdem, wie hier vorgegangen wird, kann die Parameterform aus ganz anderen Vektoren bestehen, beschreibt aber trotzdem dieselbe Ebene. Es gibt beliebig viele Möglichkeiten zur Darstellung einer Ebenen in Parameterform, denn der Stützvektor kann ein Ortsvektor eines beliebigen Punktes in E sein (durch einsetzen von Werte für r und s finden wir beliebig viele neue Stützvektoren). Neue Richtungsvektoren können beliebig über Linearkombinationen aus den gegebenen Richtungsvektoren bestimmt werden. Z.B. würde durch die Addition des 2-fachen des ersten Richtungsvektors zum 5-fachen des zweiten Richtungsvektors ein neuer Richtungsvektor bestimmt werden. Somit können zwei Ebenengleichungen in Parameterform ganz anders aussehen, beschreiben aber dieselbe Ebene. In Koordinatenform können es praktisch nur Vielfache der Gleichungen sein, womit schneller erkennbar ist, ob zwei verschieden aussehende Koordinatengleichungen dieselbe Ebene beschreiben (wie bei der Lösung zur Aufgabe 8 zu sehen ist).

Aufgabe 11:
Beschreibe die Lage der Ebenen

a) E: z=0
b) E: -x + y = 4

Lösung:

a) Diese Ebene ist mit der x-y-Ebene identisch, denn z = 0 und x und y sind beliebig. Damit wäre z.B. P(1; 2; 0) ein Punkt dieser Ebene. F: z = 1 wäre eine zu E parallele Ebene. F ist parallel zur x-y-Ebene und hat zu dieser den Abstand 1. Z.B. ist Q(1; 2; 1) ein Punkt dieser Ebene, oder R(0; 0; 1).

b) Bei Punkten dieser Ebene ist die z-Komponente beliebig, nur zwischen der x- und y-Komponente muss die Beziehung –x + y = 4 bestehen. Diese Ebene ist somit parallel zur z-Achse.

Schnittpunkt und Schnittwinkel einer Ebenen mit einer Geraden

Aufgabe 12:
Gesucht wird der Schnittpunkt und Schnittwinkel von

$$g:\ \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und } E: 2x + 2y + z = 4$$

Lösung:
Mit der Gleichung von g ergibt sich:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2r \\ y &= \quad\ -2r \\ z &= -6 + 4r \end{aligned}$$

In E eingesetzt ergibt sich:

$$2(1 + 2r) + 2(-2r) - 6 + 4r = 4$$

$$2 + 4r - 4r - 6 + 4r = 4$$

Somit ist r = 2 und es gibt einen Schnittpunkt. Wäre r komplett entfallen und es würde sich z.B. 4 = 4 ergeben, so hätte g in E gelegen. Hätte sich z.B. 0 = 4 ergeben, so wäre g parallel zu E gewesen. Solche Spezialfälle ergeben sich, wenn der Richtungsvektor der Geraden orthogonal zum Normalenvektor der Ebene ist. Wir können nun den Schnittpunkt S bestimmen, wenn wir r = 2 in die Gleichung für g einsetzen:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S(5; -4; 2)$$

Wir bestimmen den Schnittwinkel zwischen der Ebene E und der Geraden g, womit wir den Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene verwenden. Es gilt für den Schnittwinkel φ (und nur bei dem Schnittwinkel zwischen einer Geraden und einer Ebenen, wird der Sinus verwendet, siehe http://mathe-total.de/LA-Skript/AG-Ebenen.pdf auf S. 41 (10)):

$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 4 - 4 + 4 = 4,\ |\vec{n}| = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24},\ |\vec{v}| = \sqrt{4+4+1} = 3,$$

somit ist $\sin(\varphi) = \dfrac{4}{\sqrt{24} \cdot 3} \Rightarrow \varphi \approx 15{,}79°$.

Spurpunkte bei Ebenen

Aufgabe 13:
Es sollen die Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen) von

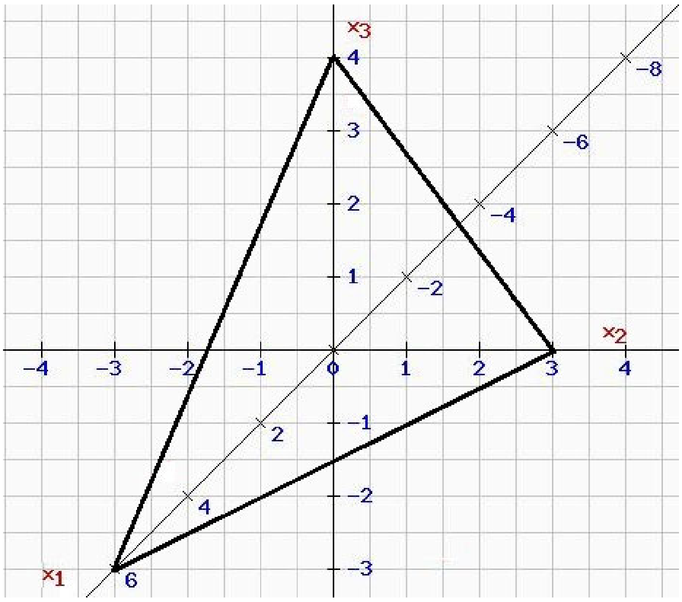
$$E: 2x + 4y + 3z = 12$$

bestimmt werden.

Lösung:
Für die Berechnung des Schnittpunktes mit der x-Achse S_x muss man y = 0 und z = 0 setzen:

$$2x \qquad = 12$$

Damit wäre x = 6 und $S_x(6; 0; 0)$. Analog ergibt sich $S_y(0; 3; 0)$ und $S_z(0; 0; 4)$.



Dividiert man die Ebenengleichung durch die Zahl auf der rechten Seite (wenn diese von Null verschieden ist, sonst würden alle Spurpunkte im Ursprung liegen), so erhält man die Achsenabschnittsform, an der alle Spurpunkte abgelesen werden können:

$$2x + 4y + 3z = 12 \mid :12$$

$$x/6 + y/3 + z/4 = 1$$

Wäre die Ebene E: 2x + y = 4 gegeben, so gäbe es keinen Schnittpunkt mit der z-Achse, da die Ebene parallel zu dieser verläuft. Wenn die Ebene in Parameterform gegeben ist, dann muss für jeden Spurpunkt ein Gleichungssystem gelöst werden, oder man müsste diese in die Koordinatenform umrechnen, was u. U. weniger aufwändig wäre.

In Aufgabe 13 wird gezeigt, wie ein Spurpunkt mit der Parameterform berechnet werden kann.

Aufgabe 13:
Es soll der Schnittpunkt von

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mit der x-Achse bestimmt werden.

Lösung:
Wenn wir den Schnittpunkt mit der x-Achse direkt berechnen wollen, müssen wir die y- und z-Komponenten Null setzen und somit das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - s + t \quad &\Leftrightarrow \quad -1 &= -s + t \\ 0 &= 1 + s - 2t \quad &\Leftrightarrow \quad -1 &= s - 2t \end{aligned}$$

lösen. Setzt wir danach die Lösung für s und t in die Ebenengleichung ein (bzw. nur in $x = -2 + s + t$), so erhalten wir den Schnittpunkt mit der x-Achse.

Über die Addition der beiden Gleichungen ergibt sich $-2 = -t$, also $t = 2$. Setzen wir $t = 2$ z. B. in die zweite Gleichung ein, ergibt sich $-1 = s - 4$ und somit $s = 3$.
Damit ist $x = -2 + 3 + 2 \cdot 1 = 3$ und somit $S_x(3; 0; 0)$

Lagebeziehung Ebene / Ebene, Schnittgerade, Schnittwinkel

Aufgabe 14:
Wie ist die Lage der Ebenen zueinander?

a) E: $x + y + 2z = 8$
F: $x + y + 2z = 10$

b) E: $x + y + 2z = 8$
F: $2x + 2y + 4z = 16$

c) E: $x + y + 2z = 8$
F: $x + 2y + 4z = 10$

Lösung:

a) Die beiden Ebenen sind parallel, denn die linke Seite der Ebenengleichung ist identisch, womit die Normalenvektoren identisch sind, aber die rechte Seite unterscheidet sich.

b) Die beiden Ebenen sind identisch, denn die Gleichungen sind Vielfache voneinander.

c) Die beiden Ebenen sind weder parallel noch identisch, denn die Normalvektoren sind keine Vielfachen voneinander. Die beiden Ebenen scheiden sich in einer Schnittgeraden.

Aufgabe 15:
Bestimme die Gleichung der Schnittgeraden und den Schnittwinkel der Ebenen
E: $x + y + 2z = 8$
F: $x + 2y + 4z = 10$

Lösung :
Wir eliminieren x und subtrahieren die bedien Ebenengleichungen:

$$-y - 2z = -2$$

Nun setzen wir z.B. $z = t$ und lösen obige Gleichung nach y auf:

$$-y - 2t = -2$$

$$y = -2t + 2$$

Nun können wir $z = t$ und $y = -2t + 2$ entweder in die Gleichung von E oder in die von F einsetzen. Wir wählen E und erhalten:

$$x + (-2t + 2) + 2t = 8$$

Somit ist $x = 6$ und wir haben eine Gleichung der Schnittgeraden g gefunden:

$$x = 6$$
$$y = 2 - 2t$$
$$z = t$$

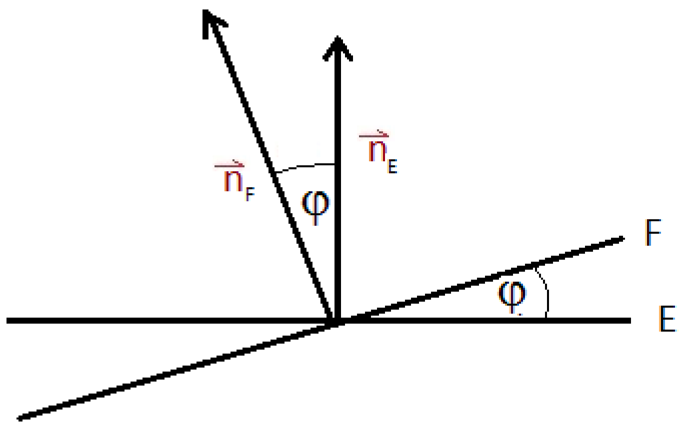
Somit ist

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um den Schnittwinkel der beiden Ebenen bestimmen zu können, muss man den Winkel zwischen den Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$ bestimmen. Da sich, je nachdem wie die Richtungsvektoren stehen, auch ein Winkel d größer als 90° zwischen den Normalenvektoren ergeben kann, so gibt man in diesem Fall 180° - d als Schnittwinkel an, oder man verwendet den Betrag des Skalarproduktes bei der Winkelberechung (wie beim Schnittwinkel zwischen zwei Geraden.

Für den Schnittwinkel m gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}$$



Hier gilt:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ \cos(\varphi) = \frac{|1+2+8|}{\sqrt{1+1+4}\cdot\sqrt{1+4+16}} \Rightarrow \varphi \approx 11.49°$$

Aufgabe 16:
Bestimme die Schnittgerade der Ebenen E und F.

E: $x - 2y + z = 8$

$$F:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:
Mit F erhält man

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2s + t \\ y &= 1 + s + t \\ z &= \phantom{1 +{}} s + 2t \end{aligned}$$

und diese in die Gleichung von E eingesetzt ergibt:

$$1 + 2s + t - 2(1 + s + t) + s + 2t = 8$$

$$-1 + s + t = 8$$

Lösen wir nach z.B. die Gleichung nach s auf, so erhalten wir s = 9 - t. Setzen wir dies in F ein, so erhalten wir eine Gleichung der Schnittgeraden:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (9-t)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}18\\9\\9\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19\\10\\9\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

HNF, Abstand Punkt/Ebene, Lotfußpunkt

Aufgabe 17:
Es soll der Abstand der Ebene E: 2x – 2y + z = 12 vom Punkt P(1; 0; 1) bestimmt werden.

Lösung:
Der Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$$

kann wie immer einfach an der Koordinatenform abgelesen werden. Wir bestimmen dessen Länge:

$$|\vec{n}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

Als nächstes dividieren wir die Gleichung von E durch die Länge des Normalvektors:

E: 2/3x – 2/3y + 1/3z = 4

Wenn die rechte Seite negativ wäre, so wird die Gleichung bei der Bestimmung der HNF mit -1 multipliziert. Auf der rechten Seite steht nun der Abstand der Ebene vom Ursprung (hier 4 LE). Subtrahieren wir noch 4 auf beiden Seiten, so dass man auf der rechten Seite eine Null erhält, so ergibt sich durch

E: 2/3x – 2/3y + 1/3z - 4 = 0

die HNF als Koordinatengleichung. Von einer Normalform ausgehend würde sich folgende Gleichung in vektorieller Form ergeben (für die Umwandlung in Normalform wurde ein Punkt von E benötigt, den wir erhalten, falls wir beispielsweise y = z = 0 setzen, womit wir (6; 0; 0) als Punkt von E erhalten):

$$E:\ \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\1/3\end{pmatrix} = 0$$

Der Abstand d(P, E) eines Punktes P(x; y; z) von E ergibt sich über:

$$d(P, E) = \left| \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right| = |2/3x - 2/3y + 1/3z - 4|$$

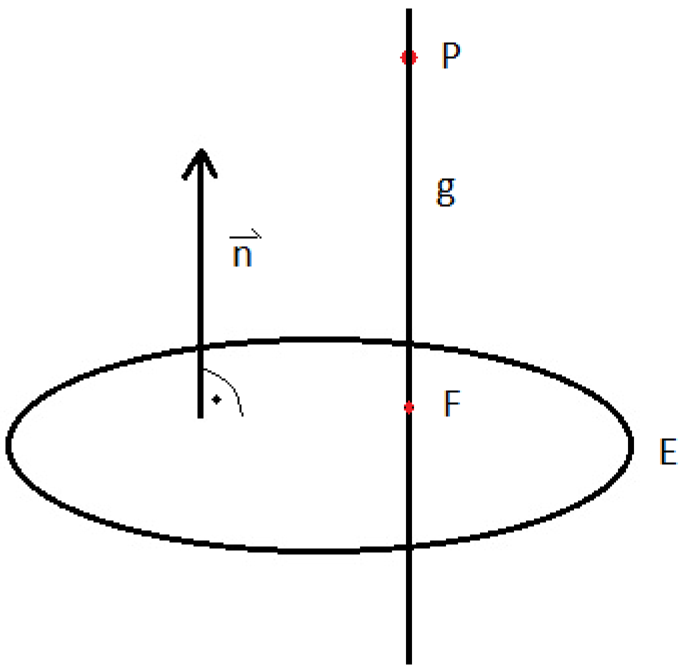
Für den Punkt P(1; 0; 1) gilt dann:

$$d(P,E) = |2/3 \cdot 1 - 2/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 1 - 4| = |-3| = 3$$

Allgemein ergibt sich somit der Abstand einer eines Punktes P zur Ebene E: $n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = c$ durch das Einsetzen des Punktes in

$$d = \left| \frac{n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z - c}{\sqrt{n_1{}^2 + n_2{}^2 + n_3{}^2}} \right|$$

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung des Abstandes eines Punktes von einer Ebene ist die folgende: Man konstruiert eine Hilfsgerade g, die den Punkt P als Stützvektor verwendet und den Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor. Damit ist die Hilfsgerade senkrecht zur Ebene und der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene ist der Lotfußpunkt F. Der Abstand von P und F ist dann wieder der Abstand der Ebene zum Punkt. Dieses Verfahren kann man auch anwenden, wenn ein Punkt an einer Ebene gespiegelt werden soll, oder wenn man eine Gerade in eine Ebene projizieren möchte.



Die Hilfsgerade ist:

$$g:\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir setzen x = 1 + 2t, y = -2t und z = 1 + t in E ein:

$$2(1 + 2t) - 2(-2t) + 1 + t = 12$$

$$2 + 4t + 4t + 1 + t = 12$$

Somit ist t = 1. In die Gleichung von g eingesetzt, ergibt sich der Ortsvektor des Lotfußpunktes:

$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wir bestimmen den Vektor $\overrightarrow{PF}$ und dessen Länge:

$$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3.$$

Nun wollen wir noch zum Schluss den Punkt P an der Ebene E spiegeln:

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{OF'} + \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Also ergibt sich der gespiegelte Punkt $P'(5;-4;3)$.

Bemerkung:
Soll der Abstand einer Geraden zu einer Ebenen bestimmt werden, so kann der Abstand der Geraden zur Ebene nur ungleich Null sein, wenn die Gerade parallel zur Ebene ist. In diesem Fall muss nur der Abstand eines Punktes der Geraden zur Ebene bestimmt werden, z.B. der Abstand des Punktes, dessen Ortsvektor der Stützvektor ist.