# Gebrochenrationale Funktionen

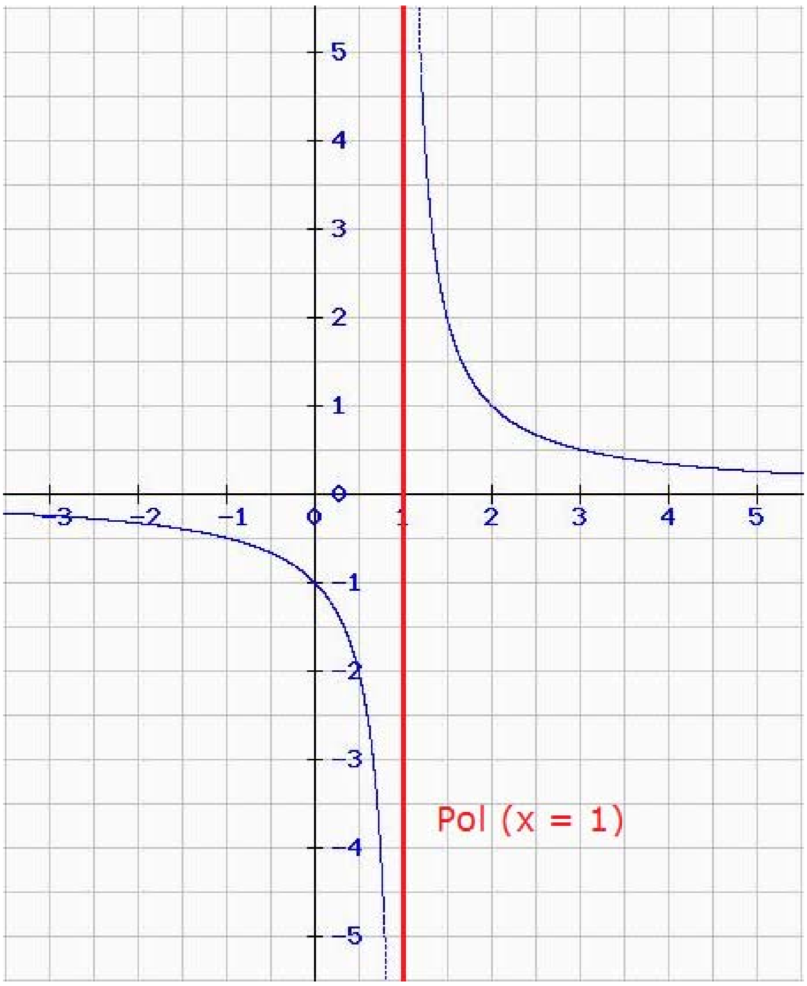
## Aufgabe 1

Bestimme den Definitionsbereich der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

Lösung:

Hier ist der maximale Definitionsbereich nicht $\mathbb{R}$, denn im der Nenner wird für x = 1 Null und man würde durch Null teilen. Aus diesem Grund muss man die Nullstellen des Polynoms im Nenner aus dem Definitionsbereich nehmen: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Die so genannte Polstelle der Funktion ist dann auch x = 1. Hier wird der Nenner gleich Null und der Zähler nicht. Wenn Zähler und Nenner an einer Stelle Null werden, dann muss man diese Stelle näher untersuchen, denn es könnte sein, dass man hier die Funktion stetig ergänzen kann und keine Polstelle vorliegt.




Diese Funktion hat keine Nullstelle, denn der Zähler ist konstant 1 und kann deshalb nicht Null werden.

**Aufgabe 2**

Bestimme Definitionsbereich und Nullstellen der Funktion

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

Lösung:

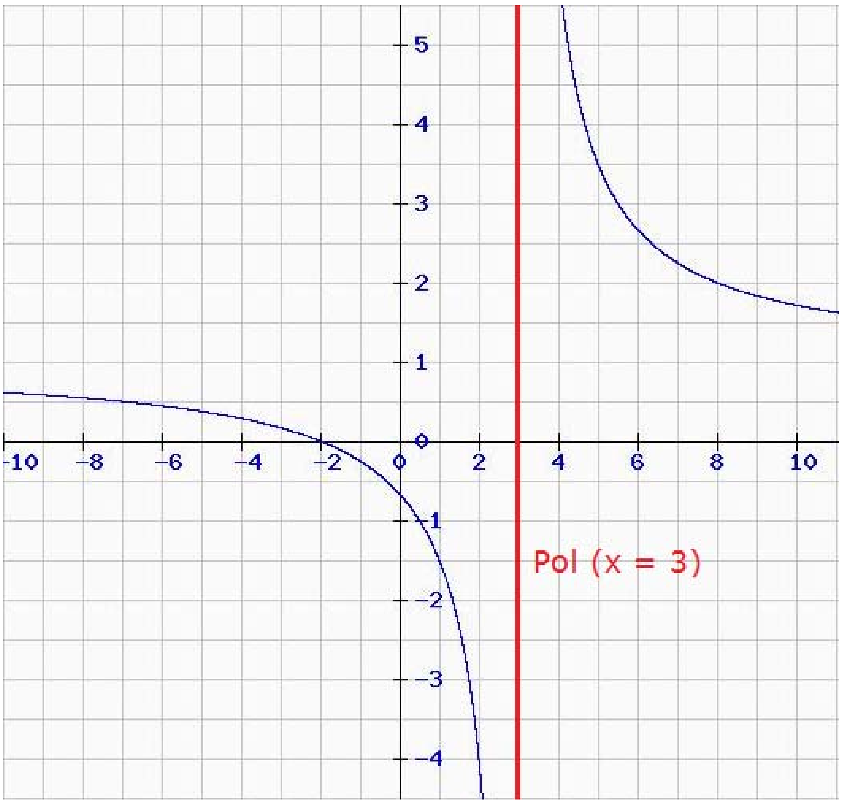
$D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ denn Nenner würde für x = 3 Null werden.

Nullstellen:

$$x + 2 = 0$$

Somit ist x = -2 eine Nullstelle, da 2 in D liegt!

Die Funktion im Beispiel hat bei x = 3 eine Polstelle.



**Aufgabe 3**

Bestimme die Asymptotengleichung der folgenden Funktion:

$$f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$$

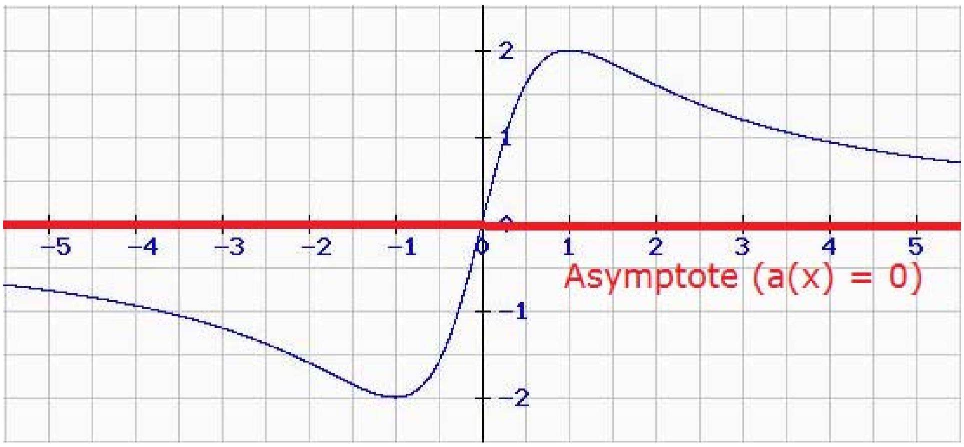
Lösung:

Hier ist die x-Achse bzw. die Funktion a(x) = 0 die Asymptote, denn

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot 4/x}{x^2(1+1/x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4/x}{1+1/x^2}=\frac{0}{1+0}=0$$

und analog gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0\ .$$




Die Tatsache, dass die Asymptote hier auf der x-Achse liegt erkennt man auch daran, dass der Grad des Polynoms im Zähler (hier gleich 1) kleiner als der Grad des Nennerpolynoms ist (hier gleich 2).

**Aufgabe 4**

Bestimme die Asymptotengleichung der folgenden Funktion:

$$f(x)=\frac{4x^2}{2x^2-1}$$

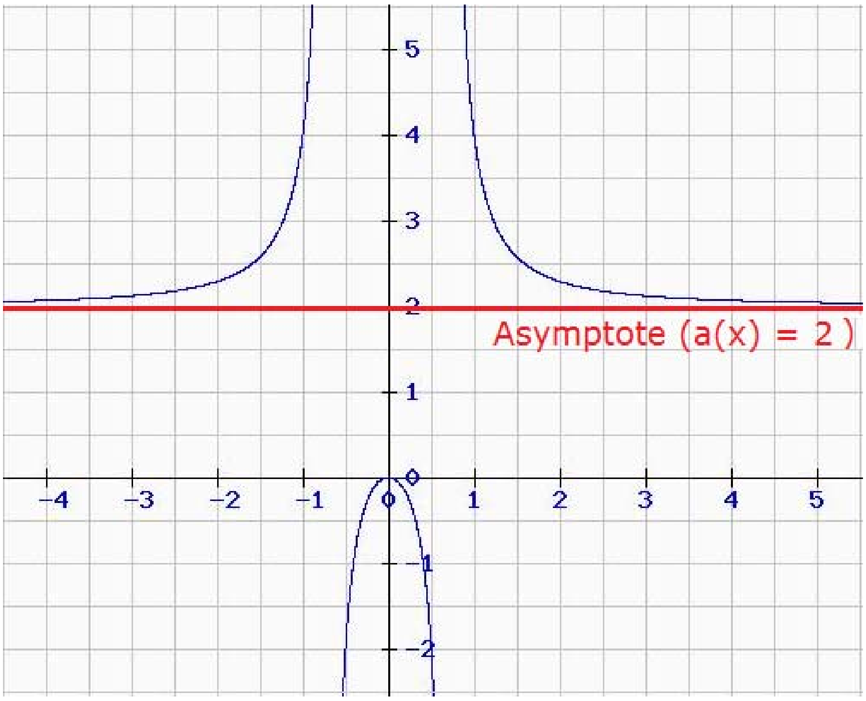
Lösung:
Hier ist der Grad des Zählerpolynoms (gleich 2) gleich dem Grad des Nennerpolynoms (auch gleich 2), womit die Funktion für |x| ⟶ ∞ (d.h. für x ⟶ ∞ und x ⟶ -∞) gegen den Quotienten aus den Faktoren der größten Potenzen von x strebt, hier gegen 4/2 = 2.

Hier ist also eine parallele zur x-Achse bzw. die Funktion a(x) = 4/2 = 2 die Asymptote, denn

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{2x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot 4}{x^2(2-1/x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2-1/x^2} = \frac{4}{2-0} = 2$$

und analog gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \ .$$




**Aufgabe 5**

Bestimme die Asymptotengleichung der Funktion:

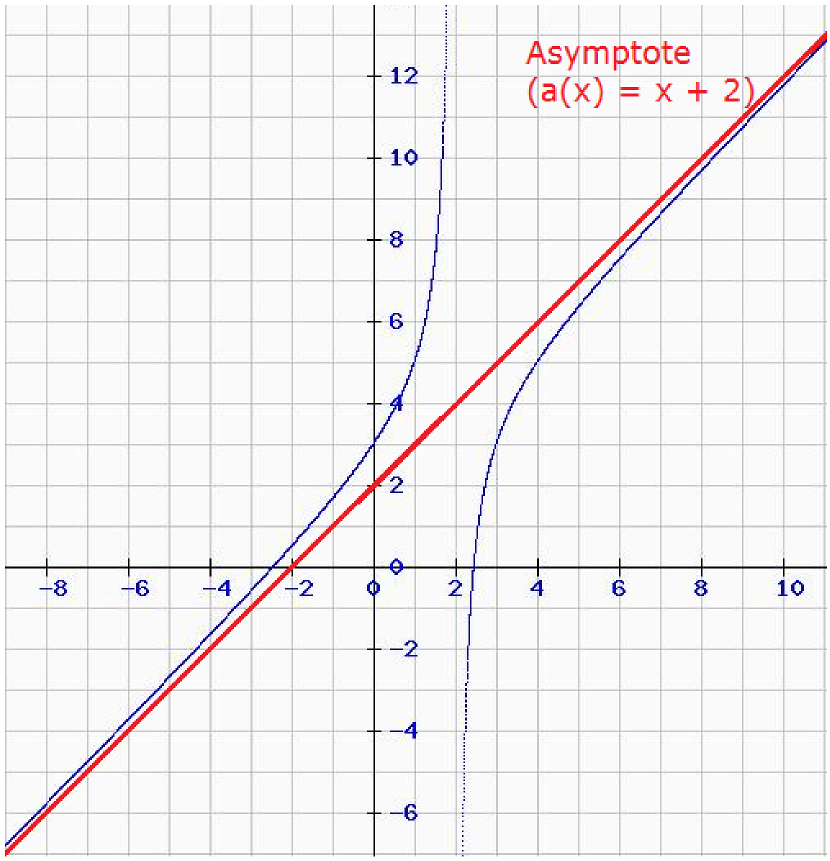
$$f(x) = \frac{x^2-6}{x-2}$$

Lösung:

Hier benötigt man eine Polynomdivision zur Bestimmung der Asymptotengleichung, denn das Zählerpolynom hat einen größeren Grad als das Nennerpolynom. Die Funktion hat dasselbe Grenzwertverhalten wie der Quotienten aus den größten Potenzen von x im Zähler und Nenner (mit Berücksichtigung der Faktoren der jeweils größten Potenzen): Hier also wie $x^2/x = x$.

$$
\begin{array}{l}
(x^2 \qquad\quad - 6) : (x - 2) = x + 2 - \dfrac{2}{x-2} \\
-\underline{(x^2 - 2x)} \\
\qquad\quad 2x - \ 6 \\
\qquad -\underline{(2x - 4)} \\
\qquad\qquad\quad -2 = \text{Rest}
\end{array}
$$

Nun ist a(x) = x + 2 die Gleichung der Asymptote, denn $-\dfrac{2}{x-2}$ geht für x gegen ± ∞ gegen Null, womit sich der Graph von f immer mehr an den Graph von a annähert, je größer der Betrag von x wird.




**Aufgabe 6**

Besitzt die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

eine Polstelle oder eine hebbare Definitionslücke?

Lösung:
Man zerlegt Zähler und Nenner in Linearfaktoren und prüft, ob bei der Grenzwertbetrachtung gekürzt werden kann:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

Dadurch gilt: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x+2) = 2 + 2 = 4$

Somit handelt es sich bei der Stelle x = 2 um keine Polstelle, sondern um eine hebbare (Definitions-)Lücke.

Man könnte auch die Regel von L'Hospital (falls bereits die Differentialrechung behandelt wurde) anwenden, die besagt, dass wenn

$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ mit $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = \lim\limits_{x \to x_0} v(x) = 0$ gegeben ist, dann

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{u'(x)}{v'(x)}$ gilt.

Also ist $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x}{1} = 4$.

Man beachte dabei, dass nicht f abgeleitet wird, sonder getrennt der Zähler und der Nenner.

**Bemerkung zur Untersuchung einer Definitionslücke:**
Nehmen wir als Beispiel die Funktion aus Aufgabe 1 mit

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ und } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Möchte man eine Definitionslücke näher untersuchen, dann ist das Verhalten von f für x gegen $x_L$ (wenn $x_L$ die Definitionslücke ist, im Beispiel ist $x_L = 1$) interessant, wenn man sich der Definitionslücke von rechts (d.h. $x > x_L$) oder von links (d.h. $x < x_L$) nähert. Dabei betrachtet man dann die Grenzwerte:

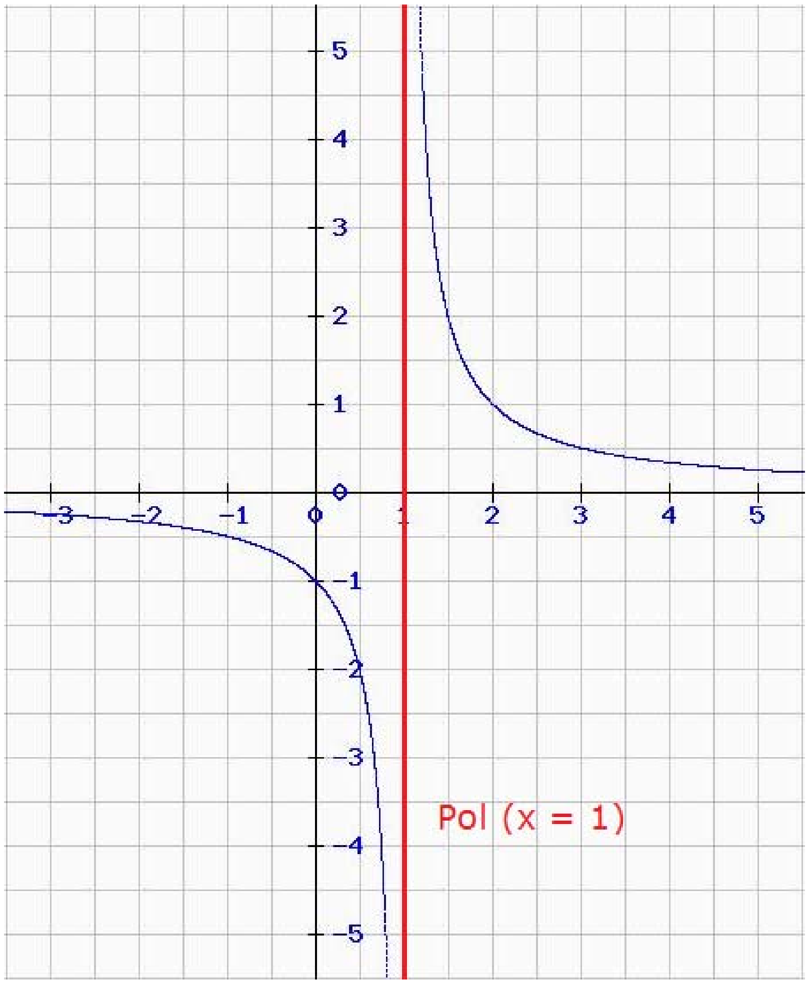
$$\lim_{\substack{x \to x_L \\ x > x_L}} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x \to x_L \\ x < x_L}} f(x)$$

Im Beispiel würde man die Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$$

betrachten. Einen ersten Eindruck erhält man, wenn man die Funktionswerte f(1,1) (also rechts von der Lücke) und f(0,9) (also links von der Lücke) bestimmt. f(1,1) = 10 und f(0,9) = -10. Da es sich hier um Polstellen (der Zähler wird für x = 1 nicht Null) handelt und keine Nullstelle von f für $0{,}9 < x < 1$ und $1 < x < 1{,}1$ vorliegt, gilt:

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$$




Man kann diese Untersuchung auch mit einer Folge durchführen, die sich der Lücke von links oder von rechts nähert. $x_n = x_L + 1/n$ konvergiert für n gegen $\infty$ gegen die Lücke $x_L$, wobei $x_n > x_L$ gilt und $x_n = x_L - 1/n$ konvergiert für n gegen $\infty$ gegen die Lücke $x_L$, wobei $x_n < x_L$ gilt. Damit ist mit $x_n = x_L + 1/n$

$$\lim_{\substack{x\to x_L \\ x>x_L}} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

und mit $x_n = x_L - 1/n$ gilt

$$\lim_{\substack{x\to x_L \\ x<x_L}} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

Im Beispiel kann man $x_n = 1 + 1/n$ wählen, womit sich

$$\lim_{\substack{x\to x_L \\ x>x_L}} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+1/n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

ergibt und $x_n = 1 - 1/n$, womit sich

$$\lim_{\substack{x\to x_L \\ x<x_L}} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-1/n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-1/n} = \lim_{n\to\infty} -n = -\infty$$

ergibt.

Bei der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

würde sich in beiden Fällen als Grenzwert $\infty$ ergeben, was man auch an der Vielfachheit der Nullstelle des Nennerpolynoms erkennt, denn es liegt eine zweifache Nullstelle im Nenner bei $x = 1$ vor und der Zähler wird nicht an dieser Stelle (und sogar an keiner Stelle) Null.