Bestimmung von Geradengleichungen

Aufgabe 1

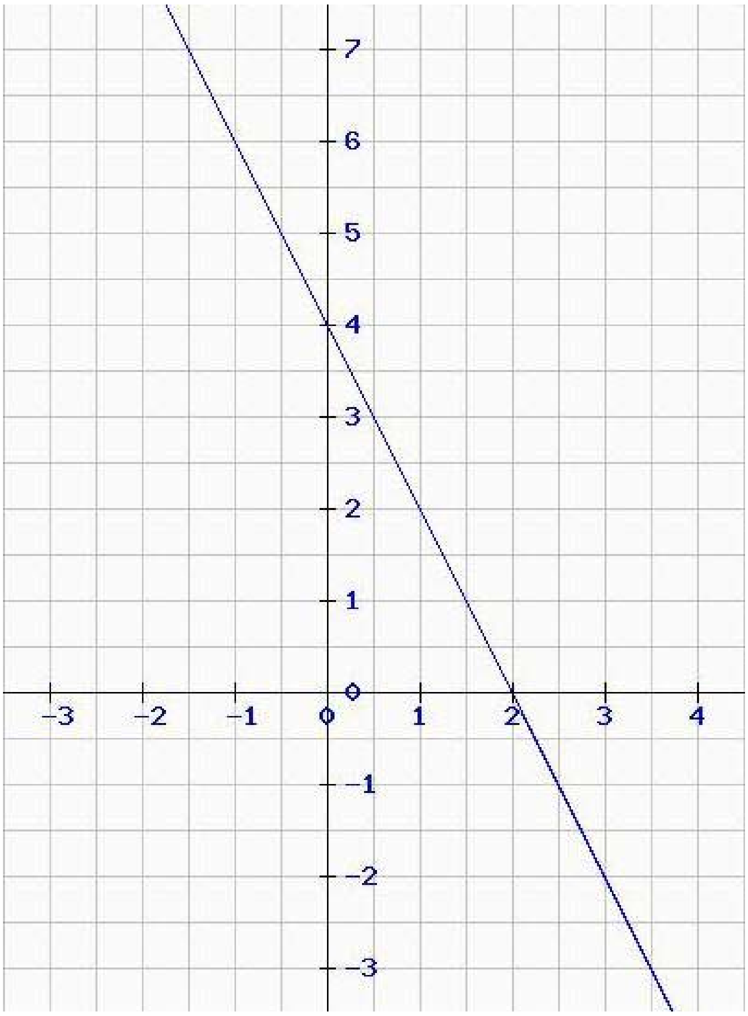
Gegeben ist die Geradengleichung f(x) = -2x + 4. Gesucht sind die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Lösung:
Mit der y-Achse (x=0):

$$S_y(0|4)$$

Mit der x-Achse (y=0):

$$-2x+4=0 \quad |-4$$
$$-2x=-4 \quad |:(-2)$$
$$x=2 \quad \Rightarrow \quad N(2|0)$$



Aufgabe 2

Gegeben sind die Punkte P(-2; 4) und Q(1; 10). Gesucht ist die Gleichung der Geraden durch diese Punkte.

Lösungsweg 1:

Eine Möglichkeit die Gleichung zu bestimmen, wäre die, die Komponenten der beiden Punkte in die Funktion f(x) = mx + b einzusetzen. Diese Möglichkeit funktioniert auch bei anderen Funktionstypen und man muss sich keine Formel merken:

(1) $f(-2) = -2m + b = 4$

(2) $f(1) = m + b = 10$

Es handelt sich hier um ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten.
Subtrahiert man die Gleichung (1) von der Gleichung (2), so „fällt b weg“:

(1) - (2) $-3m = -6 \quad |:(-3)$

$m = 2$

Setzt man m = 2 z.B. in (2) ein, so ergibt sich

$$2 + b = 10 \quad |-2$$
$$b = 8$$

Damit lautet die Gleichung: $f(x) = 2x + 8$

Lösungsweg 2:

Man könnte die Gleichung auch mit folgenden Formeln bestimmen:

(I) $f(x) = m(x - x_1) + y_1$

mit $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Würde man diese Formel verwenden, so gilt:

$$m = \frac{10 - 4}{1 - (-2)} = 2$$

$$f(x) = 2(x - (-2)) + 4 = 2x + 8$$

Statt zwei Punkten könnte auch ein Punkt $P(x_1; y_1)$ und die Steigung m gegeben sein. In diesem Fall kann man m und die Koordinaten des Punktes P direkt in (I) einsetzen.

Man kommt aber auch ohne die Gleichung (I) aus. Wenn man (wie bei Lösungsweg 2), m bestimmt hat bzw. man weiß, dass m = 2 ist, so gilt f(x) = 2x + b. Nun muss man nur einen Punkt einsetzen und erhält b, denn mit P(-2; 4) folgt, dass f(-2) = 2·(-2) + b = 4 gilt, bzw. -4 + b = 4. Nach b aufgelöst ergibt sich b = 8 und f(x) = 2x + 8.

Aufgabe 3

Gegeben ist die Gleichung f(x) = 2x + 2 der Geraden f.

a) Liegt P(1; 4) auf der Geraden f?

Lösung: $f(1) = 2 + 2 = 4$

womit P auf der Geraden liegt.

b) Bestimme die fehlenden Koordinaten der Punkte Q(3; ?) und R(?; -4) auf der Geraden f.

Lösung: $f(3) = 6 + 2 = 8 \quad \Rightarrow Q(3;8)$

$$\begin{aligned} f(x) = 2x + 2 &= -4 \qquad &|-2 \\ 2x &= -6 \qquad &|:2 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

also ist $R(-3;-4)$.

Schnittpunkt und Schnittwinkel

Aufgabe 4

Berechne den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der folgenden Geraden:

$$f(x) = 2x + 4$$
$$g(x) = -x + 1$$

Lösung:

Da die Geraden im Schnittpunkt den gleichen y-Wert (natürlich auch den gleichen x-Wert) haben, werden die Funktionsterme gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} &f(x) = g(x) \\ &2x + 4 = -x + 1 \qquad &|+x \\ &3x + 4 = 1 \qquad &|-4 \\ &3x = -3 \qquad &|:3 \\ &x = -1 \end{aligned}$$

Nun kann man den y-Wert des Schnittpunktes bestimmen, indem man x = -1 in eine der beiden Geradengleichungen einsetzt:

$$y = g(-1) = -(-1) + 1 = 2$$

Also ist $S(-1;2)$ der Schnittpunkt.

Kommen wir nun zur **Berechnung des Schnittwinkels**:
Der **Neigungswinkel einer Geraden** y = mx + b in Bezug zur x-Achse ergibt sich durch folgende Gleichung:

$$m = \tan(\alpha)$$

Hier kann sich auch ein negativer Wert für α ergeben, falls die Gerade eine negative Steigung hat. In diesem Fall ergibt sich die Gerade durch Drehung der x-Achse in negativer Drehrichtung (d.h. mit dem Uhrzeigersinn) um die Nullstelle der Geraden. Der Schnittwinkel mit der x-Achse ist $|\alpha|$.

Somit gilt für die Gerade f:

$$2 = \tan(\alpha_f) \qquad |\tan^{-1}$$

$$\alpha_f = \tan^{-1}(2) \approx 63,43°$$

Und für die Gerade g:

$$-1 = \tan(\alpha_g) \qquad |\ \tan^{-1}$$

$$\alpha_g = \tan^{-1}(-1) = -45°$$

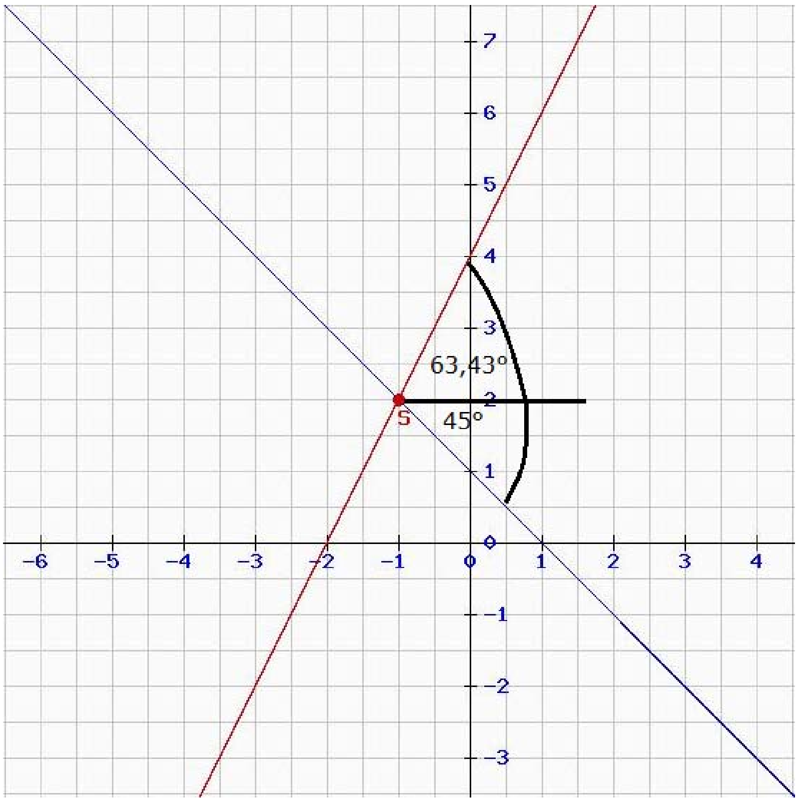
Da $\alpha_f > \alpha_g$ ist, ergibt sich der Schnittwinkel durch:

$$\alpha = \alpha_f - \alpha_g \approx 63,43° - (-45°) \approx 108,43°$$

Für $\alpha_f < \alpha_g$ wäre dieser gleich $\alpha_g - \alpha_f$ oder allgemein:

$$\alpha = |\alpha_f - \alpha_g|$$

Nun ist noch eines zu beachten: Wenn sich bei dieser Berechnung ein Winkel größer als 90° ergibt, so gibt man 180° - α als Schnittwinkel an, d.h. in unserem Beispiel beträgt dieser ca. 71,57°.



Aufgabe 5

a) Schneiden sich die Geraden f(x) = -4x + 3 und g(x) = ¼x – 1 orthogonal?

Lösung: ja, da $m_1 \cdot m_2 = -4 \cdot \frac{1}{4} = -1$

b) Gesucht ist die Gleichung einer Geraden g, die orthogonal zur Geraden f mit der Gleichung f(x) = 2x + 4 ist und die durch den Punkt P(4; 2) geht. Wie groß ist der **Abstand des Punktes P zur Geraden f**?

Lösung:

$$g(x) = m_2 \cdot x + b$$

soll orthogonal zur Geraden f mit der Steigung $m_1 = 2$ sein, also muss

$$m_1 \cdot m_2 = 2 \cdot m_2 = -1$$

gelten, womit $m_2 = -\frac{1}{2}$

ist. Also gilt $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + b$.

Nun soll die Gerade g durch den Punkt P(4; 2) gehen, somit ist

$$g(4) = -\frac{1}{2} \cdot 4 + b = 2$$

$$-2 + b = 2 \qquad |+2$$

$$b = 4$$

und $g(x) = -\frac{1}{2} \cdot x + 4$

Der Punkt auf der Geraden f, der den kleinsten Abstand zu P hat, ist der Schnittpunkt der beiden Geraden, da g senkrecht zu f verläuft und den Punkt P enthält. Wir bestimmen somit zunächst den Schnittpunkt:

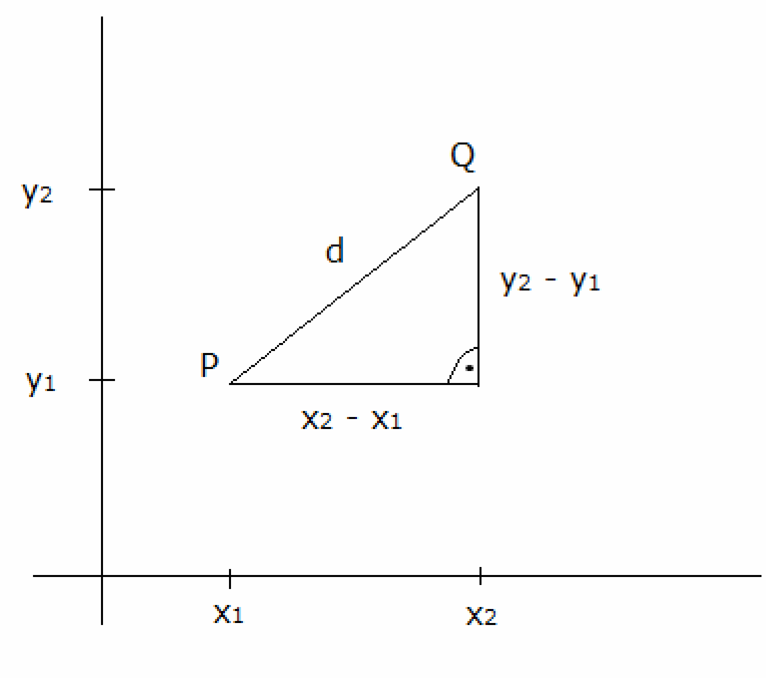
$$f(x) = g(x)$$

$$-2x + 4 = -\frac{1}{2}x + 4$$

Löst man die Gleichung nach x auf, so erhält man x = 0. y = g(0) = 4. Somit ist der Schnittpunkt Q(0; 4). Nun muss man noch den Abstand der beiden Punkte P und Q bestimmen, da dies der Abstand der Geraden f vom Punkt P ist.

Für den **Abstand d von zwei Punkten** P(x_1; y_1) und Q(x_2; y_2) gilt allgemein (die Formel ergibt sich über Pythagoras, siehe Grafik):

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Hier ist der Abstand von P und Q bzw. der Abstand von f zu P:

$$d = \sqrt{(0-4)^2+(4-2)^2} = \sqrt{20}$$