Integralrechnung

Aufgabe 1

Bestimme die Fläche zwischen der Kurve der Funktion $f(x) = x^2$ und x-Achse über dem Intervall I = [0; 3] näherungsweise. Bestimme die Obersumme und Teile das Intervall I in drei gleich große Teile.

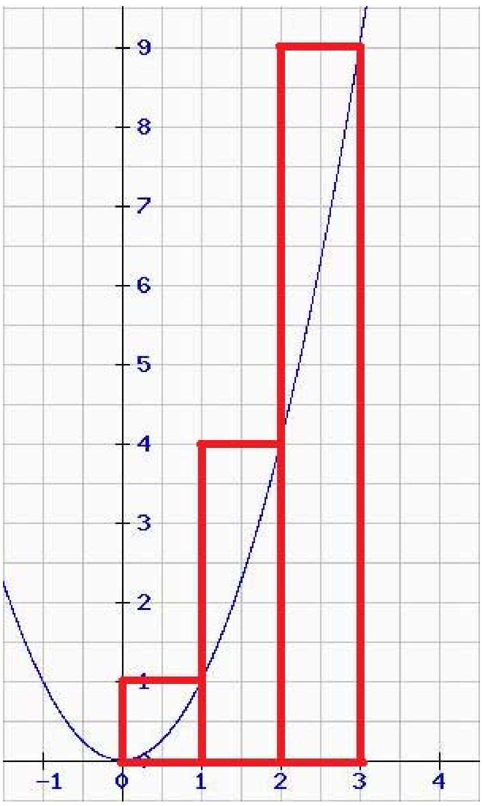
Lösung:

Wir zerlegen das Intervall in drei gleich große Teile. Die Intervallbreite eines Teilintervalls ist dann $h = (3 - 0)/3 = 1$. Also Höhen der Rechtecke mit der wir die Fläche annähern wollen, wählen wir den rechten Rand der Teilintervalle. Damit ist das erste Rechteck (von links) $f(1) = 1$ (LE = Längeneinheit) hoch.

Wir überschätzen damit die Fläche (die Summe der Rechteckflächen heißt hier Obersumme), da f über dem Intervall I streng monoton steigend ist. Würden wir den jeweils den linken Rand eines Teilintervalls verwenden, dann würden wir die Fläche unterschätzen (Untersumme). Jedes Rechteck ist 1 (LE) breit.

Die Obersumme O_3 (der Index 3 steht für die Anzahl der verwendeten Teilintervalle) hat hier einen Wert:

$$O = 1 \cdot f(1) + 1 \cdot f(2) + 1 \cdot f(3) = 1 + 4 + 9 = 14$$



Aufgabe 2

Bestimme die Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^4$
b) $f(x) = 6x^2 – 1/4x + 3$
c) $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$

Lösung:

a) $F(x) = 1/5x^5 + c$
b) $F(x) = 2x^3 – 1/8x^2 + 3x + c$
c) $F(x) = -1/2x^{-2} = -\frac{1}{2x^2} + c$

Aufgabe 3

Bestimme das unbestimmte Integral von

a) $f(x) = x+5$
b) $f(x) = ax^2+bx$

Lösung:

a) $$\int (x+5)dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x + c$$

b) $$\int (ax^2 + bx)dx = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x + c$$

Aufgabe 4

Berechne $\int_1^2 (-6x^2 + 2)dx$

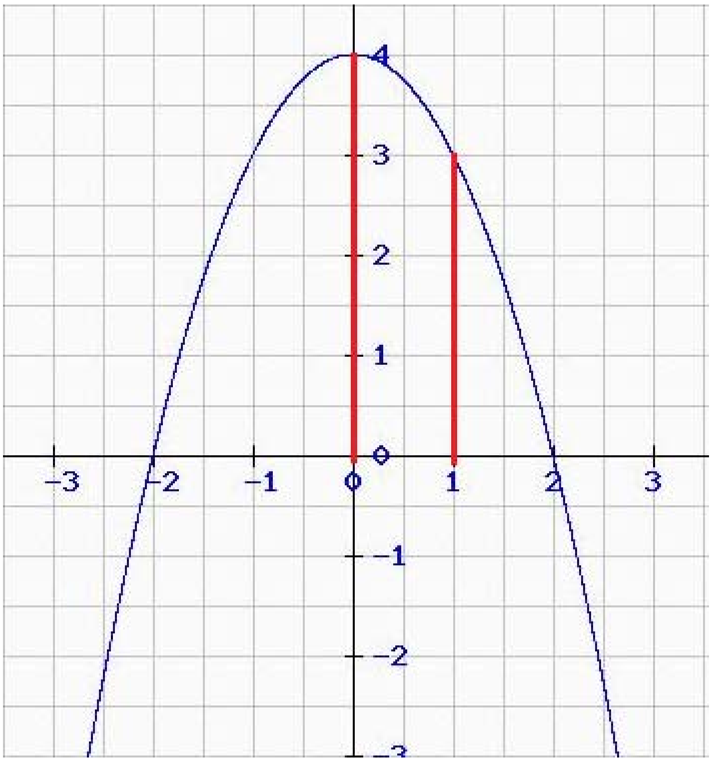
Lösung:

$$\int_1^2 (-6x^2 + 2)dx = \left[-2x^3 + 2x\right]_1^2 = -2 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2 - (-2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1) = -12$$

Flächen berechnen

Aufgabe 5

Gesucht ist die Fläche zwischen der Kurve von $f(x) = -x^2 + 4$ und der x-Achse über dem Intervall [0; 1].



Lösung:

Wir prüfen zunächst, ob eine Nullstelle im Intervall [0; 1] liegt:

$$f(x) = -x^2 + 4 = 0$$

Hier erben sich zwei Nullstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Beide liegen nicht im Inneren des Intervalls [0; 1] und da sich der Graf von f über dem Intervall [0; 1] nur oberhalb der x-Achse befindet benötigt man auch keine Betragsstriche:

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + 4 - (0) = \frac{11}{3}$$

Womit die Fläche $A = \frac{11}{3}$ FE = Flächeneinheiten) groß ist.

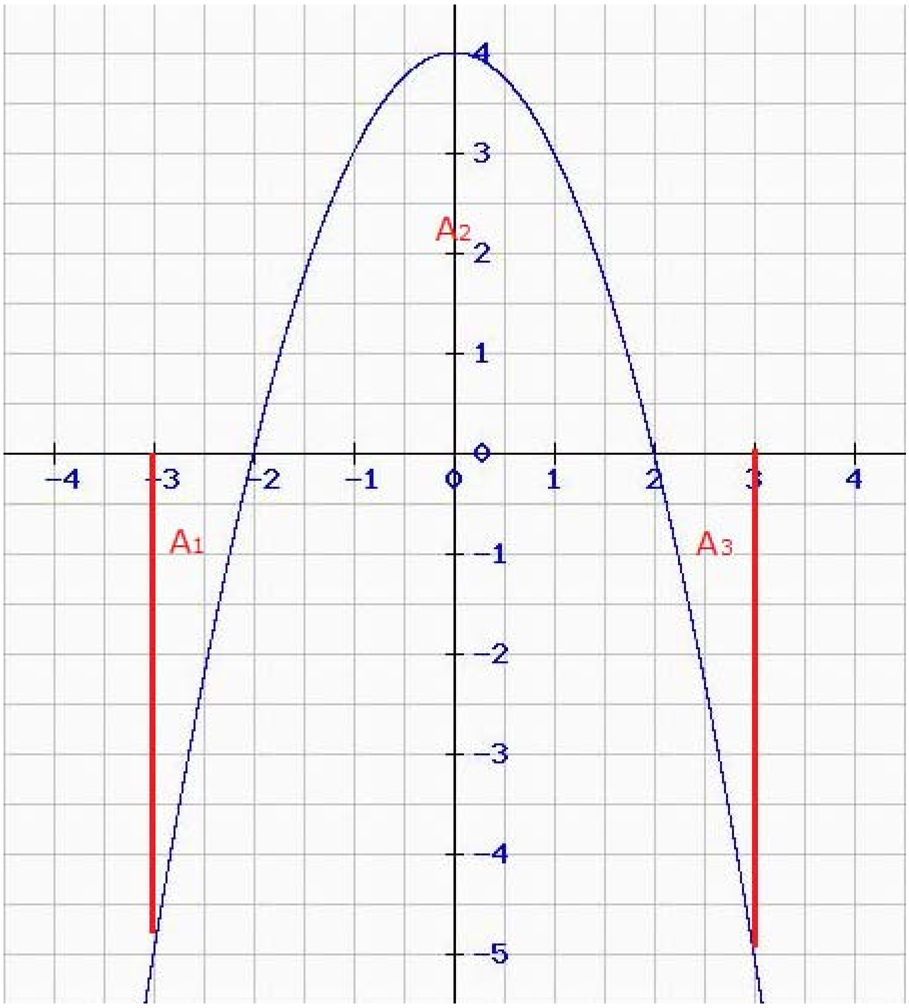
Der Text zur obigen Aufgabe hätte auch wie folgt lauten können: Gesucht ist die Fläche zwischen der Kurve von $f(x) = -x^2 + 4$, der x-Achse und den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 1$.

Aufgabe 6

Gesucht ist die Fläche zwischen der Kurve von $f(x) = -x^2 + 4$, der x-Achse im Intervall [-3; 3].

Lösung:

Beide Nullstellen fallen in dieses Intervall und man muss drei bestimmte Integrale berechnen.



$$A_1 = \left| \int_{-3}^{-2} f(x)dx \right| = \left| -\frac{7}{3} \right| = \frac{7}{3}$$

$$A_2 = \int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{32}{3}$$

$$A_3 = \left|\int_2^3 f(x)dx\right| = \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3}$$

Die Gesamtfläche ist somit:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{46}{3}$$

Aufgabe 7

Es soll die Fläche zwischen der Kurve der Funktion f(x) = 2x + 9 und der Funktion $g(x) = x^2 - 2x + 4$ bestimmt werden.

Lösung:

Wir berechnen die Schnittstellen:

$$f(x) = g(x)$$

$$2x + 9 = x^2 - 2x + 4 \quad | -2x -9$$

$$0 = x^2 - 4x - 5$$

Die Graphen der beiden Funktionen besitzen die Schnittstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 5$. Die Fläche ergibt sich nun allgemein (d.h. bei zwei Schnittstellen) über:

$$A = \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx\right|$$

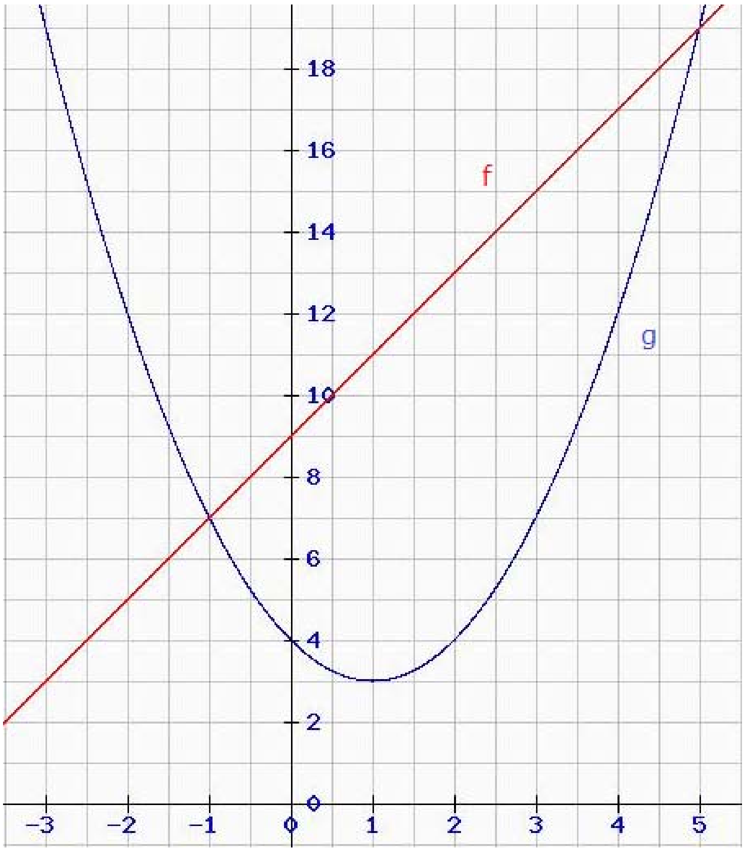
Wenn f(x) ≥ g(x) für $x \in [x_1; x_2]$ wie in der Aufgabe gilt, also wenn der Graf von f über dem Integrationsbereich über oder auf dem Graf von g liegt, dann benötigt man keine Betragsstriche, da dann der Wert des Integrals positiv ist. Möchte man auf die Betragsstriche verzichten, dann muss man als Integrand nur f(x) – g(x) oder g(x) – f(x) wählen, je nachdem, welcher Graf über dem Integrationsintervall oben liegt.

Hier gilt nun:

$$A = \int_{-1}^{5} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{5} (2x + 9 - (x^2 - 2x + 4))dx = \int_{-1}^{5} (-x^2 + 4x + 5)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x\right]_{-1}^{5} = -\frac{1}{3}\cdot 5^3 + 2\cdot 5^2 + 5\cdot 5 - (-\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 + 2\cdot(-1)^2 + 5\cdot(-1))$$

$$= 36 \text{ (FE)}$$



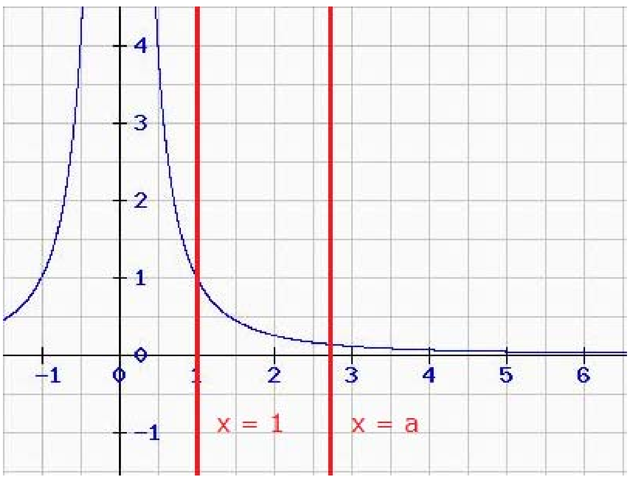
Aufgabe 8

a) Es ist die Fläche gesucht, die von der Geraden x = 1, x = a (mit a > 1) und der Funktion $f(x) = 1/x^2$ eingeschlossen wird.
b) Welcher Wert ergibt sich für diese Fläche, wenn die Fläche rechts „bis unendlich ausgedehnt" wäre (d.h. wenn a gegen unendlich geht)?

Lösung:

a) Da die Fläche von a abhängt, bezeichnen wir diese mit A(a):

$$A(a) = \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^a x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^a = -\frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{a}$$



b) Nun kann man untersuchen, welcher Wert sich für diese Fläche ergibt, wenn die Fläche rechts „bis unendlich ausgedehnt“ wäre (d.h. wenn a gegen unendlich geht) und ob dieser Wert existiert.

$$\lim_{a\to\infty} A(a) = \lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{1}{a}\right) = 1$$

Somit hat die Fläche, obwohl sie „unendlich ausgedehnt ist“ und keinen endlichen Umfang hat einen endlichen Wert.

Aufgabe 9

Wie muss a gewählt werden, damit die Fläche A(a) aus Aufgabe 8 den Wert ¾ (FE) hat?

Lösung:

In Aufgabe 8 ergab sich:

$$A(a) = \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = 1-\frac{1}{a}$$

Somit muss

$$1-\frac{1}{a} = \frac{3}{4}$$

sein. Wir lösen nach a auf:

$$1-\frac{1}{a} = \frac{3}{4} \quad | -1$$

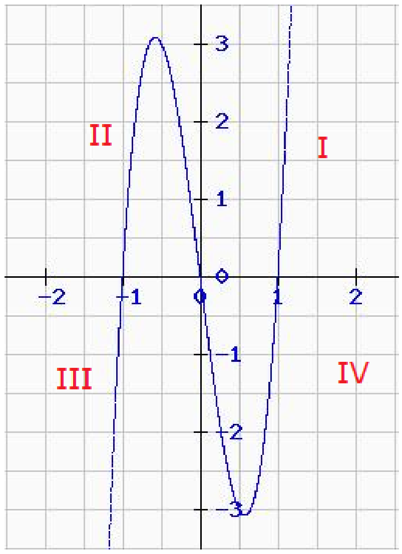
$$-\frac{1}{a} = -\frac{1}{4} \quad | \cdot a$$

$$-1 = -1/4 \cdot a \quad | \cdot (-4)$$

Somit ist a = 4.

Aufgabe 10

Der Graf der Funktion $f(x) = ax^3 - xa$ soll im vierten Quadranten (siehe Grafik, die Quadraten wurden mit römischen Ziffern bezeichnet) mit der x-Achse eine Fläche von 4 (FE) einschließen. Wie muss a gewählt werden?



Lösung:

Wir bestimmen zunächst die Nullstellen:

$$f(x) = ax^3 - xa = ax(x^2 - 1) = 0$$

Somit haben wir drei Nullstellen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$. Zur Berechnung der Fläche im vierten Quadraten muss somit über den Bereich [0; 1] integriert werden. Hier ist zu beachten, dass der Wert des Integrals negativ ist, da die Fläche im vierten Quadranten liegt.

$$\int_0^1 (ax^3 - ax)dx = \left[1/4ax^4 - 1/2ax^2\right]_0^1 = 1/4a - 1/2a = -1/4a$$

Man hätte oben auch a ausklammern und vor das Integral schreiben können. Also muss

$$-1/4a = -4$$

sein, womit a = 16 ist und die gesuchte Funktion ist $f(x) = 16x^3 - 16x$.

Partielle Integration und Substitution (wird oft nur im Leistungskurs behandelt)

Aufgabe 11

Berechne mit partieller Integration (siehe auch http://www.mathe-total.de/Analysis-Skript/Analysis-Integralrechnung.pdf ab Seite 13 bzw. 73):

$$\int_0^1 (x \cdot e^x)dx$$

Lösung:

Nun kann man v(x) = x setzen und u´(x) = e^x. Damit ist v´(x) = 1 und u(x) = e^x und wir erhalten:

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \int_0^1 \left(1 \cdot e^x\right) dx = \left[x \cdot e^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = \left[x \cdot e^x - e^x\right]_0^1 = e - e - (0 - e^0) = 1$$

Aufgabe 12

Bestimme durch Substitution (siehe auch http://www.mathe-total.de/Analysis-Skript/Analysis-Integralrechnung.pdf ab Seite 13 bzw. 73):

$$\int x \cdot e^{x^2} dx$$

Lösung:

Würde man e^{x^2} ableiten, dann ergibt sich durch die Kettenregel $2x\,e^{x^2}$, was bis auf den Faktor 2 mit dem Integrand übereinstimmt. Nun setzen wir z = x^2 (was der „innere Teil“ bei der Kettenregel wäre).

Es gilt

$$z'(x) = \frac{dz}{dx} = 2x\,,$$

womit dz = 2x·dx ist und

$$\frac{dz}{2x} = dx\,.$$

Somit können wir dx durch den obigen Ausdruck ersetzen und x^2 durch z:

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \int x \cdot e^z \frac{dz}{2x} = \int 1/2 \cdot e^z dz = 1/2 e^z + c$$

Nach einer Rücksubstitution von z = x^2 erhalten wir:

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = 1/2 e^{x^2} + c$$

Hätte es sich um ein bestimmtes Integral gehandelt, so benötigt man keine Rücksubstitution, da man die Grenzen mit ersetzt:

$$\int_1^2 x \cdot e^{x^2} dx = \int_{z(1)=1}^{z(2)=4} 1/2 \cdot e^z dz = \left[1/2 \cdot e^z\right]_1^4 = 1/2 \cdot e^4 - 1/2 \cdot e \approx 25{,}94$$