Rekonstruktion von Funktionen

Aufgabe 1

Gesucht ist eine ganzrationale Funktion bzw. Polynom vierten Grades. Der Graf ist zur y-Achse symmetrisch, hat im Punkt E(2; 25) einen Hochpunkt und schneidet an der Stelle x = 3 die x-Achse.

Aufgabe 2

Gesucht sind die Bedingungen bezüglich der Funktion f für:

a) W(2; 4) ist Wendepunkt.
b) x = 4 ist Extremstelle.
c) x = 3 ist Wendestelle und die Steigung der Wendetangente ist -2.
d) Der Graf berührt bei x = 5 die x-Achse.
e) Die Tangentensteigung im Punkt P(2; 4) ist 3.
f) Die Normalensteigung an der Stelle x = 3 ist m (≠ 0).
g) Die Tangente im Ursprung an den Graf von f hat einen Neigungswinkel von 45°.
h) Die Wendetangente an der Stelle x = 4 hat die Gleichung t(x) = 2x – 6.
i) Im Punkt P(4; 3) ist die Tangente an den Graf von f parallel zu h(x) = -4x + 5.

Aufgabe 3

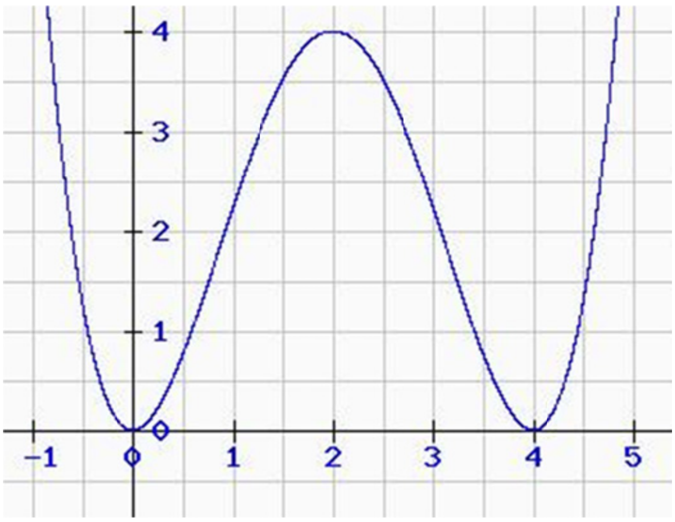
Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat in W(2; 0) einen Wendepunkt, die Wendetangente hat die Steigung -3 an der Stelle x = 3 liegt ein Tiefpunkt vor. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Aufgabe 4

Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat in S(-2; 3) einen Sattelpunkt (Wendepunkt mit waagrechter Tangente) und schneidet bei y = 7 die y-Achse. Wie lautet die Funktionsgleichung?

Aufgabe 5

Wie lautet die Funktionsgleichung des Polynoms, dessen Graf unten zu sehen ist?



Lösungen:

Aufgabe 1:
Eine ganzrationale Funktion vierten Grades hat folgende Gestalt:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

Da der Graf zur y-Achse symmetrisch ist, fallen alle Potenzen mit ungeradem Exponenten weg (d.h. b = d = 0):

$$f(x) = ax^4 + cx^2 + e$$

Somit benötigen wir drei Angaben um die Koeffizienten a, c und e bestimmen zu können:

E(2; 25) ist Extrempunkt, also gilt

(1) f(2) = 25, da der Graf durch den Punkt E(2; 25) geht.
(2) f´(2) = 0, da an einer Extremstelle die erste Ableitung verschwindet.

Da die Funktion bei x = 3 eine Nullstelle besitzt gilt:

(3) f(3) = 0

Wir benötigen die erste Ableitung: $f'(x) = 4ax^3 + 2cx$

Somit haben wir die drei Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} (1)\ 2^4a + 2^2c + e = 25 & \Leftrightarrow & 16a + 4c + e = 25 \\ (2)\ 4\cdot 2^3a + 2\cdot 2c = 0 & \Leftrightarrow & 32a + 4c = 0 \\ (3)\ 3^4a + 3^2c + e = 0 & \Leftrightarrow & 81a + 9c + e = 0 \end{array}$$

Da bei (2) bereits e fehlt, kann man noch die beiden Gleichungen (1) und (3) subtrahieren (also: (4) = (1) – (3)) und erhält dann eine weitere Gleichung (4) nur mit den Unbekannten a und c:

$$\begin{array}{lll} (2) & 32a + 4c = 0 & |\ :4 \\ (4) & -65a - 5c = 25 & |\ :5 \end{array}$$

Man hätte nun die Gleichung (2) mit 5 und die Gleichung (4) mit 4 multiplizieren können um c zu eliminieren, wir dividieren allerdings die Gleichung (2) durch 4 und die Gleichung (4) durch 5:

$$\begin{array}{ll} (5) & 8a + c = 0 \\ (6) & -13a - c = 5 \end{array}$$

Addition der beiden Gleichungen (5) und (6) liefert uns -5a = 5, womit a = -1 ist. Setzt man a = -1 in (5) ein, erhält man c = 8. Setzt man a = -1 und c = 8 beispielsweise in (1) ein, so ergibt sich

$$-16 + 32 + e = 25$$

womit e = 9 ist.

Somit ist $f(x) = -x^4 + 8x^2 + 9$ die gesuchte Funktion.

Aufgabe 2:

a) $f(2) = 4$, $f''(2) = 0$
b) $f'(4) = 0$
c) $f''(3) = 0$, $f'(3) = -2$
d) $f(5) = 0$, $f'(5) = 0$
e) $f(2) = 4$, $f'(2) = 3$
f) $f'(3) = -1/m$
g) $f(0) = 0$, $f'(0) = \tan(45°) = 1$
h) $f''(4) = 0$, $f(4) = t(4) = 2$, $f'(4) = 2$
i) $f(4) = 3$, $f'(4) = -4$

Aufgabe 3:

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Da ein Wendepunkt gegeben ist, brauchen wir die zweite Ableitung:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen:

(1) $f(2) = 0$, da der Graph durch W(2; 0) verläuft.
(2) $f''(2) = 0$, da bei $x = 2$ ein Wendepunkt vorliegt.
(3) $f'(2) = -3$, da die Tangente an der Stelle $x = 2$ die Steigung -3 hat.
(4) $f'(3) = 0$, da an der Stelle $x = 3$ ein Extremwert vorliegt.

Daraus ergeben sich die Gleichungen:

(1) $2^3a + 2^2b + 2c + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8a + 4b + 2c + d = 0$
(2) $6\cdot 2a + 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12a + 2b = 0$
(3) $3\cdot 2^2a + 2\cdot 2b + c = -3 \quad \Leftrightarrow \quad 12a + 4b + c = -3$
(4) $3\cdot 3^2a + 2\cdot 3b + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 27a + 6b + c = 0$

Wie bestimmen d zum Schluss. Die Gleichung (2) enthält kein c, damit müssen wir nur die Gleichungen (3) und (4) so « kombinieren », dass c enfällt. Dann haben wir zwei Gleichungen mit nur zwei Unbekannten. Wir subtrahieren (4) von (3) und erhalten (5), was wir mit (2) addieren können, da « zufällig » die Faktoren vor b ohne weitere Multiplikation die Anwendung des Additionsverfahrens ermöglichen:

(5) = (3) – (4): $-15a - 2b = -3$
(2) : $12a + 2b = 0$ (+)
$-3a = -3$

Damit ist $a = 1$. Dies setzen wir in (2) ein und erhalten $12 + 2b = 0$, womit $b = -6$ ist. Nun setzten wir alles in (4) ein und erhalten $27 + 6\cdot(-6) + c = 0$, womit $c = 9$ ist. Mit (1) erhalten wir
$8 + 4\cdot(-6) + 2\cdot 9 + d = 0$, womit $d = -2$ ist und somit erhalten wir $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

Aufgabe 4:

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Da ein Sattelpunkt bzw. Wendepunkt gegeben ist, brauchen wir die zweite Ableitung:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

Bedingungen:

(1) $f(-2) = 3$, da der Graph durch S(-2; 3) verläuft.
(2) $f''(-2) = 0$, da bei $x = -2$ ein Wendepunkt vorliegt.
(3) $f'(-2) = 0$, da im Sattelpunkt eine waagrechte Tangente vorliegt.
(4) $f(0) = 7$, da bei $y = -4$ die y-Achse geschnitten wird.

Daraus ergeben sich die Gleichungen:

(1) $(-2)^3a + (-2)^2b - 2c + d = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -8a + 4b - 2c + d = 3$
(2) $6\cdot(-2)a + 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -12a + 2b = 0$
(3) $3\cdot(-2)^2a + 2\cdot(-2)b + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12a - 4b + c = 0$
(4) $0^3a + 0^2b + 0c + d = 7 \quad \Leftrightarrow \quad d = 7$

An Gleichung (1) sehen wir, dass sich bei x^3 und x (bei den ungeraden Exponenten) mit negativem x natürlich negative Koeffizienten ergeben (zur Kontrolle). Wir setzen in (1) $d = 7$ ein und subtrahieren 7, so dass wir mit (1) bis (3) drei Gleichungen mit 3 Unbekannten erhalten:

(1) $-8a + 4b - 2c = -4$
(2) $-12a + 2b = 0$
(3) $12a - 4b + c = 0$

Gleichung (2) enthält kein c, so dass wir nur die Gleichungen (1) und (2) „kombinieren“ müssen (wir addieren das 2-fache von (3) zu (1), um eine weitere Gleichung ohne c zu erhalten. Zu dieser können wir dann das 2-fache von (2) addieren, um b zu eliminieren:

(5) = (1) + 2·(3): $16a - 4b = -4$
(6) = 2·(2): $-24a + 4b = 0$ (+)
$-8a = -4$

Damit ist $a = 1/2$, was wir in (2) einsetzen können: $-12\cdot1/2 + 2b = 0$
Wir erhalten damit $b = 3$. Nun setzen wir alles in (3) ein: $12\cdot1/2 - 4\cdot3 + c = 0$
Somit ist $c = 6$ und wir erhalten:
$f(x) = 1/2\cdot x^3 + 3x^2 + 6x + 7$

Da sich der Graf von f durch die Verschiebung des Grafen der Funktion $h(x) = x^3$ ergibt (um 2 nach links und 3 nach oben), hätten wir $f(x) = a\cdot(x + 2)^3 + 3$ ansetzen können und mit $f(0) = a\cdot(0 + 2)^3 + 3 = 7$ hätte sich auch $a = 1/2$ ergeben. Ausmultiplizieren von $(x + 2)^3 = (x + 2)(x + 2)^2$ oder direkte Anwendung des Pascal´schen Dreiecks (siehe http://www.mathe-total.de/Mittelstufe-Aufgaben/Binome.pdf auf S. 3) liefert uns auch die Funktionsgleichung in polynomialer Form.

Aufgabe 5:

Wie lautet die Funktionsgleichung des Polynoms?
Wir benötigen 5 Bedingungen, wenn wir ein Polynom 4. Grades (da 3 Extrema vorliegen) verwenden. Wir verwenden, dass f in O(0; 0) einen Tiefpunkt (TP) und in E(2; 4) einen Hochpunkt (HP) hat. Damit benötigen wir eine 5. Bedingung und hier verwenden wir, dass an der Stelle $x = 4$ ein Tiefpunkt vorliegt. f ist nicht symmetrisch zur y-Achse!

Ansatzfunktion: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
Wir benötigen nur die erste Ableitung (da wir keine Wendepunkte verwenden):
$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$

Bedingungen:

(1) $f(0) = 0$, da der Graf durch O(0; 0) verläuft.
(2) $f'(0) = 0$, wegen dem TP an der Stelle $x = 0$.
(3) $f(2) = 4$, da der Graf durch E(2; 4) verläuft.
(4) $f'(2) = 0$, da an der Stelle $x = 2$ ein HP vorliegt.
(5) $f'(4) = 0$, da bei $x = 4$ ein TP vorliegt.

Daraus ergeben sich die Gleichungen:

(1) $0^4a + 0^3b + 0^2c + 0d + e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e = 0$
(2) $4\cdot 0^3a + 3\cdot 0^2b + 2\cdot 0c + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = 0$
(3) $2^4a + 2^3b + 2^2c + 2d + e = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 16a + 8b + 4c + 2d + e = 4$
(4) $4\cdot 2^3a + 3\cdot 2^2b + 2\cdot 2c + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 32a + 12b + 4c + d = 0$
(5) $4\cdot 4^3a + 3\cdot 4^2b + 2\cdot 4c + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 256a + 48b + 8c + d = 0$

Wir setzen $d = 0$ und $e = 0$ in die Gleichungen (3) bis (5) ein:

(3) $16a + 8b + 4c = 4$
(4) $32a + 12b + 4c = 0$
(4) $256a + 48b + 8c = 0$

Nun eliminieren wird c:

(6) = (3) – (4): $-16a - 4b = 4$ ((3) – (4) heißt, wir subtrahieren (4) von (3))
(7) = 2·(3) – (5): $-224a - 32b = 8$

Wir eliminieren b:

(8) = -8·(6) + (7): $-96a = -24$

Wir erhalten $a = 1/4$. In (6) eingesetzt ergibt sich $-16\cdot 1/4 - 4b = 4$ ergibt $b = -2$. Dies können wir alles in (3) einsetzen, womit wir $16\cdot 1/4 + 8\cdot(-2) + 4c = 4$. Dies ergibt $c = 4$. Damit ergibt sich:
$f(x) = 1/4\cdot x^4 - 2x^3 + 4x^2$.

Eine andere Möglichkeit wäre gewesen, die Funktion aufgrund der Nullstellen $x_{1/2} = 0$ (bei doppelten Nullstellen wird die x-Achse berührt) und $x_{3/4} = 4$ so anzusetzen:
$f(x) = a\cdot(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = a\cdot x^2(x - 4)^2$. Mit $f(2) = a\cdot 2^2(2 - 4)^2 = 4$ ergibt sich $a = 1/4$.
Damit ist $f(x) = 1/4\cdot x^2(x - 4)^2 = 1/4\cdot(x^4 - 8x^3 + 16x^2)$.